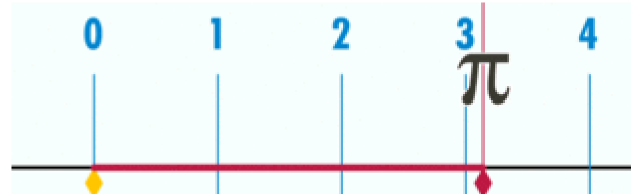
WIKIPEDIA

Pi



Tièra de 1000 articles que totas las Wikipèdias deurián aver.



Se lo diamètre dau cercle vau 1, sa circonferéncia vau π.

Lo nombre **pi**, notat amb la letra grèga dau meteis nom **π**, es una constanta matematica que sa valor es lo repòrt entre la circonferéncia d’un cercle quin que siá e son diamètre, en geometria euclidiana; es tanben la valor dau repòrt entre la superfícia d'un cercle e lo carrat de son rai.

Sonat tanben « constanta d'Arquimèdes », lo nombre π a per valor aproximada, en escritura decimala, 3,141593. De formulas scientificas nombrosas, dins de domenis coma la fisica, l'engenhariá e de segur lei matematicas, fan intervenir π, qu'es una dei constantas matematicas mai importantas[1].

Aqueu nombre es irracionau: autrament dich, se pòt pas exprimir coma lo quocient de dos nombres entiers; aiçò implica que son escritura decimala es ni finida, ni periodica. Es tanben transcendent, çò que vòu dire qu’existís pas de polinòmi non nul de coeficients entiers que π ne siá una raiç; se deu a Ferdinand von Lindemann la demostracion d'aqueu resultat en 1882. La determinacion de valors aproximadas pron precisas de π e la comprension de sa natura son de questions qu'an traversat l'istòria dei matematicas.

La letra π que nòta aqueu nombre es simplament l'iniciala dau mot grèc περίμετρος, « perimètre ». Foguèt utilizada premier per William Jones en 1707 puei popularizada per Leonhard Euler en 1737[2].

Somari

Definicions e premierei proprietats

Article detalhat : Istòria de Pi.

Definicions

En geometria euclidiana, π se definís coma lo repòrt entre la circonferéncia C d'un cercle e son diamètre d[3]:

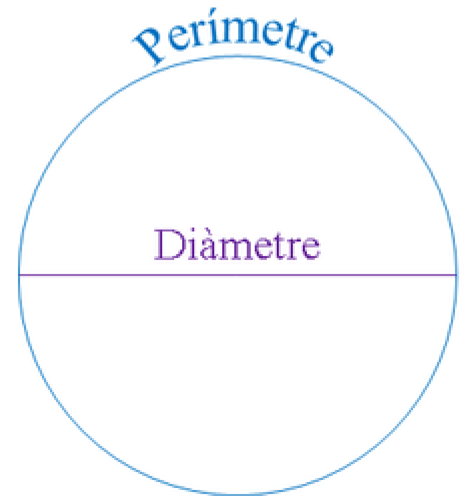
$$\pi = \frac{C}{d}.$$

Lo repòrt $^{C}/_{d}$ es constant; autrament dich, depend pas de la talha dau cercle. Per exemple, se de dos cercles, lo diamètre dau premier es doble d'aqueu dau segond, la circonferéncia dau premier es tanben dobla d'aquela dau segond: lo repòrt $^{C}/_{d}$ càmbia pas.

Se pòt tanben definir π coma lo repòrt entre la superfícia A d'un cercle e la superfícia d'un carrat qu'a per costat lo rai dau cercle[3], [4]:

$$\pi = \frac{A}{r^2}.$$

Aquelei definicions se justifican per cèrtei proprietats de la geometria euclidiana, coma la qu'enóncia que totei lei cercles son semblables. Mai lo nombre π apareis dins de domenis dei matematicas que son pas directament liats a la geometria. Dins leis expausats axiomatics dei matematicas, sovent se definís π a partir de l'analisi matematica: se pòt donar una definicion dei foncions trigonometricas (cos, sin) independenta de la geometria dau cercle, puei definir π coma lo doble dau pus pichon nombre positiu x tau que $\cos(x) = 0$[5]. Lei formulas balhadas *infra* pòdon servir de definicions equivalentas de π (pron que se justifique que definisson lo meteis nombre).



Circonferéncia = π × diamètre

Irracionalitat

Lo nombre π es irracionau, çò que significa qu'es impossible de trobar d'entiers p e q taus que $\pi = p/q$. Al-Khawarizmi conjectura tre lo sègle IX que π es irracionau[6]. Moshé Maimonides menciona pereu aquela idèa au sègle XII. Pasmens faudrà esperar lo sègle XVIII per que Johann Heinrich Lambert ne fague la demostracion[7].

Es en 1761 que dins son *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*, Lambert estúdia lo desvolopament en fraccion continua de tan(x) e demòstra que lo desvolopament en fraccion continua de tan(m/n) (ont m, n son d'entiers naturaus diferents de 0) es:

$$\tan\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m|}{|n} - \frac{m^2|}{|3n} - \frac{m^2|}{|5n} - \frac{m^2|}{|7n} + \cdots.$$

Per consequent, quand x es diferent de 0 e racionau, lo desvolopament en fraccion continua de tan(x) es illimitat; mai se sap qu'un tau desvolopament illimitat mena a un nombre irracionau. Fin finala, quand x es diferent de 0 e racionau, tan(x) es irracionau.
Se'n dedutz l'irracionalitat de π: se lo nombre π foguèsse racionau, tanben o seriá π/4, doncas tan(π/4) seriá irracionau; coma tan(π/4) = 1, qu'es racionau, es absurde.

Au sègle XX, s'es trobat d'autrei demostracions d'irracionalitat qu'exigisson pas de conoissenças pus avançadas que leis elements dau calcul integrau. Una d'entre elei, que se deu a Ivan Niven, es ben coneguda[8], [9]. Mary Cartwright aviá trobat un pauc aperavans una demostracion analòga[10].

Transcendéncia

Lo nombre π es tanben transcendent, valent a dire qu'existís ges de polinòmi de coeficients racionaus admetent π per raiç[11].

Es au sègle XIX que se demostrèt aqueu resultat. En 1873, Charles Hermite provèt que la basa dau logaritme neperian, lo nombre e, es transcendenta. En 1882, Ferdinand von Lindemann generalizèt son metòde en un teorèma (Teorèma d'Hermite-Lindemann) qu'estipula que, se x es un nombre reau o complèxe diferent de 0 e

algebric (çò es non transcendent), alora e^x es transcendent.
Se'n dedutz la transcendéncia de π: se lo nombre π foguèsse algebric, tanben o seriá iπ, doncas $e^{i\pi}$ seriá transcendent; coma $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$, qu'es algebric, es absurde.

Una consequéncia importanta de la transcendéncia de π es qu'aquest nombre es pas constructible. D'efècte, lo teorèma de Wantzel enóncia entre autrei que tot nombre constructible es algebric. Dau fach que lei coordenadas de totei lei ponchs que se pòdon construire amb la règla e lo compàs son de nombres constructibles, la qüadratura dau cercle es impossibla: se pòt pas construire, solament amb la règla e lo compàs, un carrat que sa superfícia seriá la d'un cercle donat[12]. Aqueu resultat es important istoricament, car la qüadratura dau cercle es un dei problèmas celèbres de geometria elementària que nos leguèron lei matematicians grècs de l'Antiquitat.

Representacion decimala

Lei 50 premierei chifras de l'escritura decimala de π son:

> 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
> *Vejatz lei liames extèrnes per mai de decimalas.*

Mentre qu'a l'ora d'ara, se conois mai de 10^{12} decimalas de π[13], dins leis aplicacions s'utiliza fòrça rarament mai d'un desenau de chifras. Per exemple, l'aproximacion de π que s'obtèn en conservant lei 39 premierei decimalas sufís per calcular la circonferéncia d'un cercle que sei dimensions son aquelei de l'univèrs observable amb una precision de l'òrdre dau rai d'un atòm d'idrogèn[14], [15].

Estent que π es irracionau, sa representacion decimala es illimitada e non periodica. La seguida dei decimalas de π a totjorn pivelat matematicians e amators, e s'es consacrat abòrd d'esfòrç dins lei darriers sègles per obtenir de mai en mai de decimalas e n'estudiar lei proprietats[16]. Se conois ara mai de mila miliards de decimalas de π. Maugrat lei recèrcas efectuadas, se i es decelat ges d'estructura, e lo nombre π sembla de se comportar coma un generador de nombres aleatòris[17]. Lei chifras de la representacion decimala de π son disponiblas subre fòrça paginas d'Internet; existis de logiciaus de calcul dei decimalas de π que ne pòdon determinar de miliards e que se pòt installar sus un ordinator personau quin que siá.

D'autra part, lo desvolopament decimau de π duèrbe d’autrei questions, en particular de saber se π es un nombre normau, valent a dire se sei chifras en escritura decimala son equirepartidas. Òm se pòt tanben demandar se π es un nombre univèrs, çò es se se pòt trobar dins son desvolopament decimau una sequéncia predefinida de chifras, quina que siá (per exemple: 123 456 789 987 654 321). Uei, se conois pas de respònsa a aquelei questions[18].

Aproximacion de π

Se pòt trobar empiricament una valor aproximada de π, per mejan d'un grand cercle que se'n mesura lo diamètre e la circonferéncia, puis en devesissent la circonferéncia per lo diamètre. Una autre encaminament geometric, atribuit a Arquimèdes[19], consistís a calcular lo perimètre P_n d'un poligòn regular de n costats circonscrich a un cercle de diamètre d. S'obtèn alora π gràcias a la formula:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{d}.$$

Au mai lo nombre n de costats dau poligòn es grand, au mai es precisa l'aproximacion de π per lo quocient P_n / d. Arquimèdes determinèt la precision dau metòde en comparant lo perimètre dau poligòn circonscrich amb aqueu d'un poligòn regular dau meteis nombre de costats inscrich dins lo cercle. Amb dos poligòns de

96 costats, establiguèt que:

$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$[20].

Tanben se pòt obtenir de valors aproximadas de π per mejan de metòdes d'analisi matematica. La màger part dei formulas que s'utiliza per calcular π se fondan subre sei proprietats analiticas e son de mau comprendre sensa conoissenças en trigonometria e calcul integrau. Pasmens, d'unei son pron simplas, coma la formula de Leibniz[21]:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\cdots\right).$$

Mai aquela seria convergís tròp lentament e, maugrat sa simplicitat aparenta, pòt pas servir tala e quala per calcular d'aproximacions de π (fau gaireben 300 tèrmes per obtenir doas decimalas exactas)[22]. Pasmens, es possible d'accelerar la convergéncia: se definís a partir de la precedenta una autra seguida que convergís vèrs π fòrça mai rapidament, en pausant:

$$p_{0,1} = \frac{1}{1},\ p_{0,2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3},\ p_{0,3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5},\ p_{0,4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \cdots$$

e en definissent:

$$p_{i,j} = \frac{p_{i-1,j} + p_{i-1,j+1}}{2} \text{ per tot pareu } (i,\ j) \text{ tau que } i \geq 1 \text{ e } j \geq 1.$$

Lo calcul de $p_{10,10}$ demanda aperaquí lo meteis temps qu'aqueu que fau per obtenir lei 150 premiers tèrmes de la seria iniciala, mai la precision es ben melhora:

$\pi_{10,10} = 4p_{10,10} = 3,141592653\ldots$ es una aproximacion qu'a 9 decimalas exactas.

Utilizacion en matematicas e en sciéncias

Lei formulas interessantas que contenon π son innombrablas e apareisson dins gaireben totei lei domenis dei matematicas e dei sciéncias. Una dei pus celèbras après aquelei que pertòcan la definicion geometrica de π es l'identitat d'Euler. Aquela formula es estada presentada coma la formula « mai remarcabla » per sa particularitat de far intervenir 1, 0, e, i e, de segur, π, que son entre lei nombres pus « remarcables » dei matematicas.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Geometria

Lo nombre π apareis dins fòrça formulas de geometria pertocant lei cercles e leis esfèras

Forma geometrica	Formula
Circonferéncia d'un cercle de rai *r* e de diamètre *d*	$C = 2\pi r = \pi d$
Aira d'un disque de rai *r*	$A = \pi r^2$
Aira interiora a una ellipsa de semiaxes *a* e *b*	$A = \pi ab$
Volum d'una bola de rai *r*	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$
Aira d'una esfèra de rai *r*	$A = 4\pi r^2 = \pi d^2$
Volum d'un cilindre d'autor *h* e de rai *r*	$V = \pi r^2 h$
Aira extèrna d'un cilindre d'autor *h* e de rai *r*	$A = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h = 2\pi r(r+h)$
Volum d'un còn d'autor *h* e de rai *r*	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Aira extèrna d'un còn d'autor *h* e de rai *r*	$A = \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \pi r^2 = \pi r(r + \sqrt{r^2+h^2})$

L'aira « laterala » d'un cilindre circonscrich a l'esfèra e de meteissa autor es egala a la de l'esfèra.
Tanben se tròba π dins l'expression deis airas e volums deis iperesfèras (de mai de 3 dimensions).
La mesura d'angle 180° (en gras) es egala a π radians.

En geometria euclidiana, la soma deis angles d'un triangle es egala a π. En geometria non euclidiana, aquela soma pòt èsser superiora o inferiora a π, e lo repòrt de la circonferéncia dau cercle a son diamètre pòt tanben diferir de π.

Autrei definicions

Article detalhat : Exponenciala.

La definicion istorica e usuala dau nombre π (lo repòrt de la circonferéncia d'un cercle a son diamètre) es inadaptada per desgatjar lei proprietats dau nombre π, que sòrton largament dau quadre de la geometria. Per semblant ai foncions cosinus e sinus que se definisson intuitivament en partent dau cercle trigonometric mai rigorosament per mejan dei serias de poténcias, se pòt definir analiticament lo nombre π, permetent son estudi gràcias ais instruments de l'analisi.

Lei proprietats exp(z+w)=exp(z)exp(w) e exp(0)=1 que resultan de la definicion analitica de l'exponenciala fan que l'aplicacion $t \mapsto \exp(it)$ es un morfisme de grops continu dau grop additiu $(\mathbb{R},+)$ vèrs lo grop multiplicatiu $(\mathbb{U},\times)$ (onte $\mathbb{U}$ es l'ensemble dei nombres complèxes que son modul vau 1). Se demòstra puei que l'ensemble dei nombres reaus *t* taus que exp(i*t*) = 1 es de la forma $a\mathbb{Z}$ onte *a* es un reau estrictament positiu.
Se definís alora $\pi = a/2$. Lo calcul integrau permet puei de verificar qu'aquela definicion abstracha correspònd a aquela de la geometria euclidiana.

Lo grop Bourbaki prepausa una autra definicion fòrça vesina en demostrant qu'existís un morfisme de grop *f* continu de $(\mathbb{R},+)$ vèrs $(\mathbb{U},\times)$ tau que *f*(1/4) = *i*. Demòstra qu'aqueu morfisme es periodic de periòde 1, derivable e qu'existís un reau *a* tau que, per tot reau *x*, *f'(x) = 2iaf(x)*. Definís alora π = *a*.

Lei dos metòdes precedents consistisson en realitat a rectificar lo cercle siá amb la foncion $t \mapsto e^{it}$, siá amb la foncion $t \mapsto e^{2i\pi t}$

Mai se pòt tanben definir π gràcias au calcul integrau en pausant:

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

çò qu'equivau a calcular l’aira d’un quart de disc.

O ben per mejan dau denombrament, en sonant $\varphi(n)$ lo nombre de pareus d’entiers naturaus (p, q) taus que $p^2+q^2\leq n^2$ e en definissent:

$$\pi = 4\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^2}$$

çò qu'es un autre biais de carrar lo quart de disc.

O encara, se la foncion cosinus es estada definida analiticament (per sa seria de poténcias o per l’unica solucion f de l’eqüacion diferenciala $y'' = -y$ verificant lei condicions $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$), lo nombre π se pòt definir coma lo pus pichon reau positiu a tau que cos(a)= -1.

Citem enfin (per clavar arbitrariament aquela lista) la definicion integrala seguenta de π, que se tròba dins cèrtei presentacions de l'analisi complèxa:

$$\pi = 2\int_{-1}^{+1}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Seguidas e serias

De seguidas o serias variadas convergisson vers π (o un sieu multiple racionau) e son la fònt de calculs d'aproximacions d'aqueu nombre.

Metòde d’Arquimèdes

$$\pi = \lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Lei doas seguidas definidas per $s_n = n\sin(\pi/n)$, e $t_n = n\tan(\pi/n)$, $n \geq 3$, representan lei semiperimètres dei poligòns regulars de n costats, inscrich dins lo cercle trigonometric per s_n, exinscrich per t_n. S'utilizan per mejan de seguidas extrachas que son indèx (lo nombre de costats dau poligòn) dobla a cada iteracion, per obtenir π en passant au limit dins d’expressions ont apareisson leis operacions aritmeticas elementàrias e la raiç carrada. Ansin, òm se pòt inspirar dau metòde d'Arquimèdes — vejatz l'istoric dau calcul de π — per donar una definicion recurrenta dei seguidas extrachas qu'an per tèrmes s_{2n} e t_{2n} o encara $s_{3.2^n}$ e $t_{3.2^n}$, gràcias ais identitats trigonometricas usualas:

$$t_{2n} = 2\frac{s_n\cdot t_n}{s_n+t_n} \qquad t_3 = 3\sqrt{3} \quad t_4 = 4$$
$$s_{2n} = \sqrt{s_n\cdot t_{2n}} \quad s_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad s_4 = 2\sqrt{2}\,.$$

En utilizant leis identitats trigonometricas, $2\sin(x/2) = \sqrt{2-\cos(x)}$ e $2\cos(x/2) = \sqrt{2+\cos(x)}$ (x ∈ [0,π]), se pòt exprimir $s_{2^{k+1}}$ e $s_{3.2^k}$ (k≥1) per embessonaments successius de raiç carradas.

Lo nombre π se pòt alora escriure coma una expression onte s'embessonan de raiç carradas:

$$\pi = \lim_{k\to+\infty}\left(2^k\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}\right)$$

(k es lo nombre de raiç carradas embessonadas)

o encara:

$$\pi = \lim_{k\to+\infty}\left(3\cdot 2^{k-1}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}\right)$$

Una autra expression de $s_{2^{k+1}}$, que se pòt deduire simplament de la premiera d'aquelei doas egalitats (basta de multiplicar per √(2+√…)), mena au produch infinit seguent (formula de François Viète, 1593).

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\cdots.$$

Somas e produchs infinits

- $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$ (formula de Leibniz, James Gregory e Madhava de Sangamagrama[23], [24])
- $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2k+2}{2k+1}\cdot\frac{2k+2}{2k+3}\cdot\cdots=\frac{\pi}{2}$ (produch de Wallis)
- $\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$ (formula que se deu a Ramanujan)
- $\frac{1}{\pi}=12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$ (formula que se deu a David e Gregory Chudnovsky)

Seguidas recursivas

Una seguida que sa definicion s'inspira de la formula de Brent-Salamin (1975):

Sián tres seguidas realas (A_n), (B_n) e (C_n) que se definisson mutualament:

$$\begin{array}{ll} A_0 = 1 & A_{n+1} = \frac{A_n+B_n}{2} \\ B_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} & B_{n+1} = \sqrt{A_n\cdot B_n} \\ C_0 = \frac{1}{4} & C_{n+1} = C_n - 2^n\left(\frac{A_n-B_n}{2}\right)^2 \end{array}$$

Alara:

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{(A_n + B_n)^2}{4 \cdot C_n}$$

Es de notar que lo nombre de decimalas exactas (en basa 10) dobla quasi a cada iteracion.

Foncion zêta de Riemann

Articles detalhats : Problèma de Basilèa e Foncion zêta de Riemann.

- $\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler)
- $\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{k^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$,

  e pus generalament, Euler indica que ζ(2n) es un multiple racionau de π^{2n} per tot entier naturau *n*.

Foncion Gamma d'Euler

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ (foncion gamma d'Euler)

Probabilitats e estatisticas

Lo nombre π apareis sovent en probabilitats e en estatisticas. Citem entre autrei:

- l'integrala de Gauss, liada a la definicion de la lei normala[25]:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

- La formula seguenta (« formula de Stirling »), tirada de l'analisi, a d'aplicacions en probabilitats. En particular, permet de demostrar la convergéncia de la lei binomiala vèrs la lei normala:

  $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

  (significa que lo quocient dei dos membres a per limit 1).

D'autra part, existís divèrseis experiéncias aleatòrias ont una probabilitat s'exprimís en foncion de π. Pòdon doncas servir (teoricament), en efectuant un grand nombre d'espròvas, a determinar una aproximacion de π.

L'agulha de Buffon es una experiéncia aleatòria imaginada per lo naturalista Buffon. Consistís a mandar una agulha de longor *a* sus un postam que sei pòsts son de largor *L*. La question es de determinar la probabilitat que l'agulha cope la linha separant doas pòsts; aquela probabilitat es[26],[27],[28],[29]:

$$p = \frac{2a}{\pi \times L}$$

Se pòt utilizar aquò per determinar una aproximacion de π:

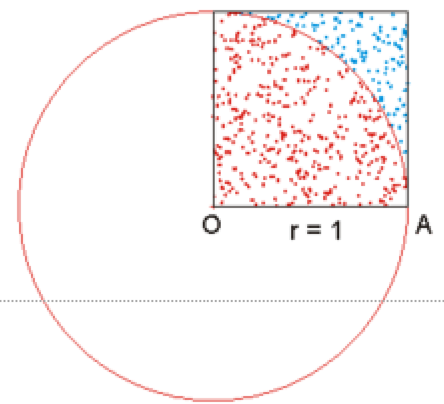
$$\pi \approx \frac{2na}{xL},$$

onte *n* es lo nombre d'agulhas mandadas, e *x* es lo nombre d'aquelei que crosan una linha. D'efècte, se *n* es grand, la probabilitat *p* es vesina de la frequéncia *p' = x / n* (lei dei grands nombres):

$$\pi = \frac{2a}{Lp} \approx \frac{2a}{Lp'} \text{ e } \frac{2a}{Lp'} = \frac{2na}{xL}.$$

La precision d'aqueu metòde es fòrça limitada; e mai lo resultat siá matematicament corrècte, se pòt pas utilizar per determinar experimentalament mai de quauquei decimalas de π[26].

Una autra experiéncia aleatòria consistís a prendre *a l'azard* un ponch dins un carrat de costat 1; la probabilitat qu'aqueu ponch siá dins lo quart de disc de rai 1 vau π/4; aiçò es de bòn comprendre, que la superfícia dau quart de cercle es π/4 mentre que la superfícia dau carrat es 1. Se pòt simular aquela experiéncia aleatòria (metòde de Montcarles) per avalorar π.



Avaloracion de π per lo metòde de Montcarles.

Seguida logistica

Siá (x_n) la seguida deis iterats de la foncion logistica de paramètre $\mu = 4$ aplicada a un reau x_0 chausit dins l'interval [0, 1] (valent a dire que se definís, per tot $n \geqslant 0$, $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$).
La seguida (x_n) sòrt de l'interval [0;1] e divergís per gaireben totei lei valors inicialas.

Òm a: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{x_i} = \frac{2}{\pi}$ per quasi totei lei valors inicialas x_0.

Proprietats avançadas

Aproximacions numericas

Coma π es transcendent, n'existís pas d'expression utilizant unicament de nombres e de foncions algebricas[11]. Leis expressions de π ont apareisson ren que leis operacions de l'aritmetica elementària fan generalament intervenir de somas infinidas (serias) o de produchs infinits[30]; au mai s'aponde de tèrmes (o de factors) dins lo calcul, au mai lo resultat serà precís.

Per consequent, la preséncia de π dins de calculs numerics impausa de lo remplaçar per una aproximacion. Ben sovent, leis aproximacions 3,14 o 22/7 sufison; per una precision melhora, leis engenhaires utilizan sovent 3,1416 o 3,14159 (respectivament 5, 6 chifras significativas). Leis aproximacions 22/7 e 355/113 (qu'an respectivament 3, 6 chifras significativas), s'obtenon a partir dau desvolopament de π en fraccion continua.

L'aproximacion de π per 355/113 es la melhora que se pòsque escriure amb ren que 3 o 4 chifras au numerator e au denominator; la melhora aproximacion seguenta es 103993/33102, que ne demanda un nombre fòrça mai important (aiçò vèn de l'aparicion dau nombre 292 dins lo desvolopament en fraccion continua de π)[31].

La premiera aproximacion numerica de π foguèt probable 3[32]. Es una estimacion per defaut perqu'es lo repòrt entre lo perimètre d'un exagòn regular inscrich dins un cercle e lo diamètre dau cercle.

Fraccions continuas

La seguida dei denominators parciaus dau desvolopament de π en fraccion continua a pas de regularitat vesedoira[33]:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \cdots],$$

çò qu'es una notacion equivalenta a:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cdots}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

Pasmens, existís de fraccions continuas generalizadas representant π e qu'an una estructura regulara[34]:

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\cdots}}}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cfrac{11^2}{6+\cdots}}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cfrac{5^2}{11+\cdots}}}}}}$$

Lo nombre π/2 se pòt tanben escriure coma fraccion continua generalizada, fasent intervenir la seguida deis invèrs dei nombres entiers:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/2+\cfrac{1}{1/3+\cdots+\cfrac{1}{1/n+\cdots}}}}$$

Questions dubèrtas

De questions nombrosas se pausan encara: π, e son dos nombres transcendents, mai son algebricament independents o existís un polinòmi de doas variablas e de coeficients entiers que lo pareu (π, e) ne siá solucion? La question es encara en suspens. En 1929, Aleksandr Gelfond demostrèt que e^{π} es transcendent[35] e en 1996, Iurii Nesterenko a demostrat que π e e^{π} son algebricament independents.

Coma es estat dich *supra*, se sap pas encara se lo nombre π es normau, ni mai s'es un nombre univèrs en basa 10.

Lo nombre π dins l'art

Fòrça obratges o sites senhalan la preséncia supausada dau nombre π dins l'arquitectura dei piramidas; pus precisament, π seriá lo repòrt entre lo perimètre de la basa e lo doble de l'autor dei piramidas[36]. Es verai que la penda de la piramida de Kheops es de 14/11; per tant, lo repòrt de la basa a l'autor es 22/14, la mitat de 22/7, una aproximacion frequenta de π. Per aquò, i fau veire una intencion? Es mai que dobtós[37] puei que la penda dei piramidas es pas constanta e que, segon lei regions e leis epòcas, se tròba de pendas de 6/5 (piramida roja), 4/3 (piramida de Khephren) o 7/5 (piramida romboïdala) que menan a un repòrt (entre perimètre e doble de l'autor) alunhat de π.

En tot cas, lo nombre π es present dins la cultura artistica modèrna. Per exemple, dins *Contact*, un roman de Carl Sagan, jòga un ròtle clau dins lo scenario e se suggerís que i a un messatge escondut fonsament dins sei decimalas, plaçat per lo creator de l'univèrs. Aquela partida de l'istòria es estada levada de l'adaptacion dau roman au cinèma.

Dins lo domeni musicau, la cantairitz e compositritz Kate Bush publiquèt en 2005 son album *Aerial*, contenent lo tròç « π » que sei paraulas son principalament compausadas dei decimalas de π[38].

Nòtas e referéncias

[33][32]

1. (en) Howard Whitley Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart & Winston, 1969 (legir en linha (http://books.google.com/books?id=LIsuAAAAIAAJ&q=%22important+numbers+in+mathematics%22&dq=%22important+numbers+in+mathematics%22&pgis=1))
2. (en) Milton Comanor, *Pi (Collier's Encyclopedia)*, vol. 19, New York, Macmillan Educational Corporation, 1976, p. 21-22
3. (en) « About Pi » (http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pi.html), Ask Dr. Math FAQ (consultat en 29 d'octobre de 2007)
4. (en) Bettina Richmond, « Area of a Circle » (http://www.wku.edu/~tom.richmond/Pir2.html), Western Kentucky University, 1999 (consultat en 4 de novembre de 2007)
5. (en) Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976 (ISBN 0-07-054235-X), p. 183
6. (en)Glimpses in the history of a great number: Pi in Arabic mathematics (http://www.muslimheritage.com/topics/default.cfm?TaxonomyTypeID=12&TaxonomySubTypeID=59&TaxonomyThirdLevelID=-1&ArticleID=997) per Mustafa Mawaldi
7. (en) Johann Heinrich Lambert, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*, vol. XVII, 1761, p. 265-322

8. (en) Ivan Niven, « A simple proof that π is irrational », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 53, nº 6, 1947, p. 509 (legir en linha (http://www.ams.org/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002-9904-1947-08821-2.pdf))
9. (en) Helmut Richter, « Pi Is Irrational » (http://www.lrz-muenchen.de/~hr/numb/pi-irr.html), Leibniz Rechenzentrum, 1999 (consultat en 4 de novembre de 2007)
10. (en) Harold Jeffreys, *Scientific Inference*, Cambridge University Press, 1973
11. (en) Steve Mayer, « The Transcendence of π » (http://dialspace.dial.pipex.com/town/way/po28/maths/docs/pi.html) (consultat en 4 de novembre de 2007)
12. (en) « Squaring the Circle » (http://www.cut-the-knot.org/impossible/sq_circle.shtml), cut-the-knot (consultat en 4 de novembre de 2007)
13. (en) « Current publicized world record of pi » (http://www.super-computing.org/pi_current.html) (consultat en 14 d'octobre de 2007)
14. (en) Robert M. Young, *Excursions in Calculus*, Washington, Mathematical Association of America (MAA) (ISBN 0883853175, legir en linha (http://books.google.com/books?id=iEMmV9RWZ4MC&pg=PA238&dq=intitle:Excursions+intitle:in+intitle:Calculus+39+digits&lr=&as_brr=0&ei=AeLrSNKJOYWQtAPdt5DeDQ&sig=ACfU3U0NSYsF9kVp6om4Zyw3a7F82QCofQ)), p. 417
15. (en) « Statistical estimacion of pi using random vectors » (http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=AJPIAS000067000004000298000001&idtype=cvips&gifs=yes) (consultat en 12 d'aost de 2007)
16. (en) « Pi Digits » (http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html), sur *MathWorld* (consultat en 22 de febrier de 2010)
17. (en) Chad Boutin, « Pi seems a good random number generator - but not always the best », *Purdue University*, 2005 (legir en linha (http://www.purdue.edu/UNS/html4ever/2005/050426.Fischbach.pi.html))
18. Conférence de Jean-Paul Delahaye, *le nombre pi est-il simple o compliqué ?*, mardi 3 octobre 2006, cité des sciences, consultable aicí (http://www.universcience.fr/fr/conferences-du-college/seance/c/1239026849604/le-nombre-pi-est-il-simple-ou-complique--/p/1239022827777/)
19. (en) Rick Groleau, « Infinite Secrets: Approximating Pi » (http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/pi.html), NOVA, 2003 (consultat en 4 de novembre de 2007)
20. (en) Petr Beckmann, *A History of Pi*, Barnes & Noble Publishing, 1989 (ISBN 0880294183)
21. (en) Pierre Eymard, The Number π, American Mathematical Society, 2004 (ISBN 0821832468, legir en linha (http://books.google.com/books?id=qZcCSskdtwcC&pg=PA53&dq=leibniz+pi&ei=uFsuR5fOAZTY7QLqouDpCQ&sig=k8VlN5VTxcX9a6Ewc71OCGe_5jk)), p. 53
22. (en) Vito Lampret, « Even from Gregory-Leibniz series π could be computed: an example of how convergence of series can be accelerated », *Lecturas Mathematicas*, 2006 (legir en linha (http://www.scm.org.co/Articulos/832.pdf))
23. atribuida sovent a Leibniz, mai probable que foguèt descubèrta anteriorament per Gregory, cf. (en)*Pi_through_the_ages.html* (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html) sus lo site de l'Universitat de Saint Andrews. Aquela formula èra pereu estada trobada devèrs 1400 per lo matematician indian Madhava, mai aquela descubèrta demorèt inconeguda dau monde occidentau.
24. (en) Biographie de Madhava (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Madhava.html) sus lo site de l'Universitat de Saint-Andrew
25. (en) Eric W. Weisstein, « Gaussian Integral » (http://mathworld.wolfram.com/GaussianIntegral.html), MathWorld, 2004 (consultat en 8 de novembre de 2007)
26. (en) Eric W. Weisstein, « Buffon's Needle Problem » (http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html), MathWorld, 2005 (consultat en 10 de novembre de 2007)
27. (en) Alex Bogomolny, « Math Surprises: An Example » (http://www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml), cut-the-knot, 2001 (consultat en 28 d'octobre de 2007)
28. (en) J. F. Ramaley, « Buffon's Noodle Problem », *The American Mathematical Monthly*, 1969

29. (en) « The Monte Carlo algorithm/method » (http://www.datastructures.info/the-monte-carlo-algorithmmethod/), sur *datastructures*, 2007 (consultat en 7 de novembre de 2007)
30. (en) Eric W. Weisstein, « Pi Formulas » (http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html), MathWorld, 2007 (consultat en 10 de novembre de 2007)
31. (en) Xavier Gourdon, « Collection of aproximacions for π » (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piApprox.html), Numbers, constants and computation (consultat en 8 de novembre de 2007)
32. J J O'Connor, E F Robertson, « A history of Pi » (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html), agost 2001 (consultat lo 30 octobre 2007)
33. [[OEIS:{{{id}}}|{{{id}}}]]: Continued fraccion for Pi, On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
34. (en) L. J. Lange, An Elegant Continued Fraction for *π*, vol. 106, t. 5, The American Mathematical Monthly, 1999 (legir en linha (http://www.jstor.org/stable/2589152)), p. 456-458
35. La Recherche, nº 392, Décembre 2005, *L'indispensable nombre π*
36. Vejatz per exemple *Le secret de la grande pyramide* de George Barbarin
37. Segon *The journal of the Society for the study of Egyptian Antiquities*, ISSN 0383-9753, 1978, vol 8, n4, « la valor de π qu'apareis dins la relacion entre l'autor e la longor de la piramida es probable fortuita »
38. (en) David Blatner, « UK | Magazine | 3.14 and the rest » (http://news.bbc.co.uk/1/hi/magazine/7296224.stm), BBC News, 2008 (consultat en 2 de genier de 2010)

Liames extèrnes

- (fr) La preuve par Lambert de l'irrationnalité de π (1761), commentée sur lo site BibNum (http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/lambert-et-l%E2%80%99irrationalite-de-p-1761)
- (fr) De nombreuses informations historiques et mathématiques sur pi dans pi314.net (http://www.pi314.net/)
- (en) Site permetent una recèrca de chifras dins lei 200 000 000 premierei decimalas (http://www.angio.net/pi/piquery)
- (en) Lo site Wolfram Mathematics (http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html) acampa un grand nombre de formulas pertocant π
- (en) 10 000 decimalas de π (http://www.math.utah.edu/~pa/math/pi.html)

Nocion de nombre

Ensembles usuals	Entièr natural ($\mathbb{N}$) • Entièr relatiu ($\mathbb{Z}$) • Nombre decimal ($\mathbb{D}$) • Nombre racional ($\mathbb{Q}$) • Nombre real ($\mathbb{R}$) • Nombre complèxe ($\mathbb{C}$)
Extensions	Quaternion ($\mathbb{H}$) • Octonion ($\mathbb{O}$) • Sedenion ($\mathbb{S}$) • Nombre complèxe desplegat • Tessarina • Nombre bicomplexe ($\mathbb{C}_2$) • Nombre multicomplexe ($\mathbb{C}_n$ • $\mathcal{M}\mathbb{C}_n$) • Biquaternion • Coquaternion • Quaternion iperbolic • Octonion desplegat • Nombre ipercomplèxe • Nombre p-adic ($\mathbb{Q}_p$) • Nombre iperreal • Nombre superreal • Nombre dual • Drecha reala acabada • Nombre cardinal • Nombre ordinal • Nombre surreal • Nombre pseudoreal
Proprietats particularas	Paritat • Nombre primièr • Nombre compausat • Nombre figurat • Nombre perfièch • Nombre positiu • Nombre negatiu • Fraccion diadica • Nombre irracional • Nombre algebric • Nombre transcendant • Nombre imaginari pur • Nombre de Liouville • Periòde • Nombre normal • Nombre univèrs • Nombre constructible • Nombre real calculable • Nombre transfinit • Infiniment petit
Exemples	• Pi (π) • Raiç carrada de dos ($\sqrt{2}$) • Nombre d'aur (φ) • zèro (0) • Unitat imaginària (i) • Constanta de Neper (e) • Alef-zèro ($\aleph_0$) • Taula de las constantas matematicas
Articles ligats	Chiffre • Numeracion • Fraccion • Operacion • Calcul • Algèbra • Aritmetica • Seguida d'entièrs • Infinit (∞) • Chifre significatiu

